

Espaces de Hilbert*

Thomas Pellegrin

Faculté de Physique et Ingénierie, Université de Strasbourg

Notes pour la séance de tutorat du 30 septembre 2024, sur le CC1 de L3 mathématiques. Sujets abordés : opérateurs hermitiens, formalisme des bras-kets, changements de bases.

Disclaimer: ACCEPTED MANUSCRIPT : this is not the final published version.

Soit un espace de Hilbert de dimension deux, sous-tendu par les vecteurs de la base orthonormée $\mathcal{B} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. On définit les vecteurs $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$, et les opérateurs :

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \quad , \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2i}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \quad , \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \quad (1)$$

Question 1: Rappeler la définition d'un opérateur hermitique.

$\hat{\mathbf{H}}$ est un opérateur hermitique (ou hermitien) s'il vérifie : $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}^\dagger$.
Autrement dit, $\hat{\mathbf{H}}$ est hermitique s'il est égal à son adjoint.

Question 2: Rappeler la définition d'un opérateur unitaire.

$\hat{\mathbf{U}}$ est un opérateur unitaire s'il vérifie : $\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^\dagger = \hat{\mathbf{U}}^\dagger\hat{\mathbf{U}} = \mathbb{1}$.
De manière équivalente, $\hat{\mathbf{U}}$ est unitaire s'il est inversible et que $\hat{\mathbf{U}}^{-1} = \hat{\mathbf{U}}^\dagger$.

Question 3: Rappeler la définition du produit scalaire hermitien.

Notons $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert considéré. L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H}^2 \mapsto \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien si c'est une **forme hermitienne définie positive** :

- **forme hermitienne** :
 - à valeur dans le corps de référence : $\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2, \langle x|y \rangle \in \mathbb{C}$
 - propriété de symétrie : $\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2, \langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$
(où z^* désigne le conjugué complexe de z)
 - linéarité à droite : $\forall (x, y, z) \in \mathcal{H}^2, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle x|y + \lambda z \rangle = \langle x|y \rangle + \lambda \langle x|z \rangle$
- **positive** : $\forall x \in E, \langle x|x \rangle \geq 0$
- **définie** : $\forall x \in E, \langle x|x \rangle = 0 \implies x = 0$

NB : On oublie souvent de préciser qu'un produit scalaire, qu'il soit réel ou complexe, est avant tout une **fonctionnelle**, c'est-à-dire une application à valeur dans le corps de référence. Les physiciens quanticiens chevronnés vous diront que c'est implicite, mais en maths on se doit d'être rigoureux :P

Question 4: Montrer que $(|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi|$.

Soit l'opérateur $\mathcal{O} = |\phi\rangle\langle\psi|$. On veut montrer que $\mathcal{O}^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi|$.

* Organisé par le Pôle Tutorat de la Faculté de Physique et Ingénierie, Université de Strasbourg.

On part de la définition de l'adjoint d'un opérateur :

$$\begin{aligned}
 \langle x | \mathcal{O}^\dagger | y \rangle &= \langle y | \mathcal{O} | x \rangle^* \\
 &= \left(\langle y | \phi \rangle \langle \psi | x \rangle \right)^* \\
 &= \langle y | \phi \rangle^* \langle \psi | x \rangle^* && \text{par distributivité de la conjugaison complexe sur la} \\
 &&& \text{multiplication des scalaires} \\
 &= \langle \phi | y \rangle \langle x | \psi \rangle && \text{par définition du produit scalaire hermitien} \\
 &= \langle x | \underbrace{|\psi\rangle\langle\phi|}_{=\mathcal{O}^\dagger} | y \rangle && \text{par commutativité de la multiplication des scalaires}
 \end{aligned}$$

On identifie ainsi $\mathcal{O}^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi|$.

Question 5: Montrer que $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$ sont hermitiques.

On calcule :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_x^\dagger &= \left[\frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \right]^\dagger \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \right)^\dagger + \left(|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right)^\dagger \right] && \text{par linéarité de l'adjoint} \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left(|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \right) && \text{d'après le résultat de la question 4} \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) && \text{par commutativité de l'addition des opérateurs} \\
 &= \hat{S}_x
 \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_y^\dagger &= \left[\frac{\hbar}{2i} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \right]^\dagger && \hat{S}_z^\dagger = \left[\frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right) \right]^\dagger \\
 &= -\frac{\hbar}{2i} \left[\left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \right)^\dagger - \left(|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right)^\dagger \right] && = \frac{\hbar}{2} \left[\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \right)^\dagger + \left(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right)^\dagger \right] \\
 &= -\frac{\hbar}{2i} \left(|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \right) && = \frac{\hbar}{2} \left(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2i} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) && = \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right) \\
 &= \hat{S}_y && = \hat{S}_z
 \end{aligned}$$

Question 6: Donner les expressions de $(S_x^\mathcal{B})$ et $(S_y^\mathcal{B})$ et $(S_z^\mathcal{B})$, les matrices représentant les opérateurs $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$ dans la base $\mathcal{B}$.

Les matrices des opérateurs $\hat{S}_i$ (où $i \in \{x, y, z\}$) dans la base $\mathcal{B}$ prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{S}_i|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{S}_i|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}_i|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_i|\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

On calcule donc, en utilisant le caractère orthonormal de la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\hat{S}_x |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle \langle\uparrow|) |\uparrow\rangle & \hat{S}_x |\downarrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle \langle\uparrow|) |\downarrow\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow|\uparrow\rangle}_{=0} + |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{=1}) & &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}_{=1} + |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow|\downarrow\rangle}_{=0}) \\ &= \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle & &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle\end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice : $(S_x^B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Et de même pour les opérateurs $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$:

$$\begin{aligned}\hat{S}_y |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2i} (|\uparrow\rangle \langle\downarrow| - |\downarrow\rangle \langle\uparrow|) |\uparrow\rangle & \hat{S}_y |\downarrow\rangle &= \frac{\hbar}{2i} (|\uparrow\rangle \langle\downarrow| - |\downarrow\rangle \langle\uparrow|) |\downarrow\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2i} (|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow|\uparrow\rangle}_{=0} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{=1}) & &= \frac{\hbar}{2i} (|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}_{=1} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow|\downarrow\rangle}_{=0}) \\ &= -\frac{\hbar}{2i} |\downarrow\rangle & &= \frac{\hbar}{2i} |\uparrow\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_z |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|) |\uparrow\rangle & \hat{S}_z |\downarrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|) |\downarrow\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{=1} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow|\uparrow\rangle}_{=0}) & &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow|\downarrow\rangle}_{=0} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}_{=1}) \\ &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle & &= -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (S_y^B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2i} \\ -\frac{\hbar}{2i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (S_z^B) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

NB : Tous les calculs sont ici détaillés, cependant pour ce genre de questions où l'on demande de "donner" plusieurs résultats (la formulation a son importance) et où tous les calculs sont très similaires, on peut évidemment gagner du temps en ne détaillant qu'un calcul puis en utilisant un argument de similarité. Pour un devoir d'une heure, il ne faut pas hésiter à récupérer du temps où on le peut !

Question 7: En utilisant les expressions (1), montrer que $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$.

On calcule le commutateur de $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$:

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \frac{\hbar}{2i} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) - \frac{\hbar}{2i} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \\
 &= \frac{\hbar^2}{4i} \left(\underbrace{|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|}_{=0} - \underbrace{|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|}_{=1} + \underbrace{|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|}_{=1} - \underbrace{|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|}_{=0} \right) \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{4i} \left(\underbrace{|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|}_{=0} + \underbrace{|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|}_{=1} - \underbrace{|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|}_{=1} + \underbrace{|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|}_{=0} \right) \\
 &= \frac{\hbar^2}{4i} \left(-|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right) - \frac{\hbar^2}{4i} \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2i} \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right) \\
 &= i\hbar\hat{S}_z
 \end{aligned}$$

Question 8: Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant les matrices (S_x^B) et (S_y^B) et (S_z^B) .

On calcule ici le commutateur des matrices (S_x^B) et (S_y^B) :

$$\begin{aligned}
 [(S_x^B), (S_y^B)] &= (S_x^B)(S_y^B) - (S_y^B)(S_x^B) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2i} \\ -\frac{\hbar}{2i} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2i} \\ -\frac{\hbar}{2i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{4i} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2}{4i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4i} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{4i} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2i} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2}{2i} \end{pmatrix} \\
 &= i\hbar(S_z^B)
 \end{aligned}$$

Question 9: Montrer que $B' = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ constitue également une base orthonormée de l'espace de Hilbert considéré ici.

Vérifions d'abord que les vecteurs $|+\rangle$ et $|-\rangle$ forment une famille orthogonale :

$$\begin{aligned}
 \langle + | - \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle\uparrow| + \langle\downarrow| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - 0 + 0 - 1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Vérifions ensuite que cette famille soit bien orthonormée :

$$\begin{aligned}
 \langle +|+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle \uparrow | + \langle \downarrow | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle + |\downarrow \rangle \right) & \langle -|- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle \uparrow | - \langle \downarrow | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle - |\downarrow \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\langle \uparrow | \uparrow \rangle + \langle \uparrow | \downarrow \rangle + \langle \downarrow | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \downarrow \rangle \right) & &= \frac{1}{2} \left(\langle \uparrow | \uparrow \rangle - \langle \uparrow | \downarrow \rangle - \langle \downarrow | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \downarrow \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + 0 + 0 + 1) & &= \frac{1}{2} (1 - 0 - 0 + 1) \\
 &\boxed{= 1} & &\boxed{= 1}
 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{B}' = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ est une famille orthonormée de deux vecteurs de $\mathcal{H}$, et on a $\dim(\mathcal{H}) = 2$, c'est donc une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

Question 10: Donner les expressions de $(S_x^{\mathcal{B}'})$ et $(S_y^{\mathcal{B}'})$ et $(S_z^{\mathcal{B}'})$, les matrices représentant les opérateurs $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Les matrices des opérateurs $\hat{S}_i$ (où $i \in \{x, y, z\}$) dans la base $\mathcal{B}'$ prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} \langle + | \hat{S}_i | + \rangle & \langle + | \hat{S}_i | - \rangle \\ \langle - | \hat{S}_i | + \rangle & \langle - | \hat{S}_i | - \rangle \end{pmatrix}$$

On procède donc de la même manière qu'à la question 6 :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_x |+\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow \rangle \langle \downarrow | + |\downarrow \rangle \langle \uparrow | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle + |\downarrow \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle \underbrace{\langle \downarrow | \uparrow \rangle}_{=0} + |\downarrow \rangle \underbrace{\langle \uparrow | \uparrow \rangle}_{=1} + |\uparrow \rangle \underbrace{\langle \downarrow | \downarrow \rangle}_{=1} + |\downarrow \rangle \underbrace{\langle \uparrow | \downarrow \rangle}_{=0} \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle + |\downarrow \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2} |+\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_x |-\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow \rangle \langle \downarrow | + |\downarrow \rangle \langle \uparrow | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle - |\downarrow \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle \underbrace{\langle \downarrow | \uparrow \rangle}_{=0} + |\downarrow \rangle \underbrace{\langle \uparrow | \uparrow \rangle}_{=1} - |\uparrow \rangle \underbrace{\langle \downarrow | \downarrow \rangle}_{=1} - |\downarrow \rangle \underbrace{\langle \uparrow | \downarrow \rangle}_{=0} \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(-|\uparrow \rangle + |\downarrow \rangle \right) \\
 &= -\frac{\hbar}{2} |-\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_y |+\rangle &= \frac{\hbar}{2i} \left(|\uparrow \rangle \langle \downarrow | - |\downarrow \rangle \langle \uparrow | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle + |\downarrow \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2i\sqrt{2}} \left(|\uparrow \rangle \underbrace{\langle \downarrow | \uparrow \rangle}_{=0} - |\downarrow \rangle \underbrace{\langle \uparrow | \uparrow \rangle}_{=1} + |\uparrow \rangle \underbrace{\langle \downarrow | \downarrow \rangle}_{=1} - |\downarrow \rangle \underbrace{\langle \uparrow | \downarrow \rangle}_{=0} \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2i\sqrt{2}} \left(-|\downarrow \rangle + |\uparrow \rangle \right) \\
 &= \frac{\hbar}{2i} |-\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_y |-\rangle &= \frac{\hbar}{2i} \left(|\uparrow\rangle \langle\downarrow| - |\downarrow\rangle \langle\uparrow| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar}{2i\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\uparrow|}_{=0} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\uparrow|}_{=1} - |\uparrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\downarrow|}_{=1} + |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\downarrow|}_{=0} \right) \\
&= \frac{\hbar}{2i\sqrt{2}} \left(-|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \right) \\
&= -\frac{\hbar}{2i} |+\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_z |+\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\uparrow|}_{=1} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\uparrow|}_{=0} + |\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\downarrow|}_{=0} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\downarrow|}_{=1} \right) \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar}{2} |-\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_z |-\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\uparrow|}_{=1} - |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\uparrow|}_{=0} - |\uparrow\rangle \underbrace{\langle\uparrow\downarrow|}_{=0} + |\downarrow\rangle \underbrace{\langle\downarrow\downarrow|}_{=1} \right) \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar}{2} |+\rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (S_x^{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}, \quad (S_y^{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar}{2i} \\ \frac{\hbar}{2i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (S_z^{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Question 11: Les matrices vues plus haut sont reliées par les relations :

$$(S_x^{\mathcal{B}}) = (U)^\dagger (S_x^{\mathcal{B}'}) (U), \quad (S_y^{\mathcal{B}}) = (U)^\dagger (S_y^{\mathcal{B}'}) (U), \quad (S_z^{\mathcal{B}}) = (U)^\dagger (S_z^{\mathcal{B}'}) (U) \quad (2)$$

Donner l'expression de la matrice (U) et montrer que celle-ci est unitaire.

Les matrices $(S_i^{\mathcal{B}})$ et $(S_i^{\mathcal{B}'})$ sont liées par un changement de base. La matrice (U) est donc ici la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et par définition, elle s'écrit :

$$(U) = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|+\rangle & \langle\uparrow|-\rangle \\ \langle\downarrow|+\rangle & \langle\downarrow|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(U) est clairement auto-adjointe, ainsi pour montrer qu'elle est unitaire il suffit de calculer :

$$(U)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{= I_2}$$

On a donc bien montré que (U) est inversible et que $(U)^{-1} = (U)^\dagger$, ainsi (U) est unitaire.

Question 12: On définit les opérateurs $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$ et $\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$.

(a) Déterminer $\hat{S}_+^\dagger$ et $\hat{S}_-^\dagger$.

(b) Calculer $\hat{S}_+ |\uparrow\rangle$, $\hat{S}_+ |\downarrow\rangle$, $\hat{S}_- |\uparrow\rangle$ et $\hat{S}_- |\downarrow\rangle$.

(a) On calcule :

$$\begin{aligned} \hat{S}_+^\dagger &= (\hat{S}_x + i\hat{S}_y)^\dagger & \hat{S}_-^\dagger &= (\hat{S}_x - i\hat{S}_y)^\dagger \\ &= \hat{S}_x^\dagger + (i\hat{S}_y)^\dagger & &= \hat{S}_x^\dagger - (i\hat{S}_y)^\dagger \\ &= \hat{S}_x - i\hat{S}_y & &= \hat{S}_x + i\hat{S}_y \\ &\boxed{= \hat{S}_-} & &\boxed{= \hat{S}_+} \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{S}_+$ et $\hat{S}_-$ sont adjoints l'un de l'autre.

(b) On calcule, en réutilisant les résultats obtenus en question 6 :

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ |\uparrow\rangle &= (\hat{S}_x + i\hat{S}_y) |\uparrow\rangle & \hat{S}_+ |\downarrow\rangle &= (\hat{S}_x + i\hat{S}_y) |\downarrow\rangle \\ &= \hat{S}_x |\uparrow\rangle + i\hat{S}_y |\uparrow\rangle & &= \hat{S}_x |\downarrow\rangle + i\hat{S}_y |\downarrow\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle + i \left(-\frac{\hbar}{2i} \right) |\downarrow\rangle & &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle + i \left(\frac{\hbar}{2i} \right) |\uparrow\rangle \\ &\boxed{= 0} & &\boxed{= \hbar |\uparrow\rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_- |\uparrow\rangle &= (\hat{S}_x - i\hat{S}_y) |\uparrow\rangle & \hat{S}_- |\downarrow\rangle &= (\hat{S}_x - i\hat{S}_y) |\downarrow\rangle \\ &= \hat{S}_x |\uparrow\rangle - i\hat{S}_y |\uparrow\rangle & &= \hat{S}_x |\downarrow\rangle - i\hat{S}_y |\downarrow\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle - i \left(-\frac{\hbar}{2i} \right) |\downarrow\rangle & &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle - i \left(\frac{\hbar}{2i} \right) |\uparrow\rangle \\ &\boxed{= \hbar |\downarrow\rangle} & &\boxed{= 0} \end{aligned}$$

Question 13: Quelles sont les valeurs propres de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$?

Reprenons différents résultats obtenus précédemment. On a montré que la matrice de $\hat{S}_x$ est diagonale dans la

base $\mathcal{B}'$: $(S_x^{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$.

On a donc immédiatement que $\text{Sp}(\hat{S}_x) = \left\{ -\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2} \right\}$.

De la même manière, on a montré que la matrice de $\hat{S}_z$ est diagonale dans la base $\mathcal{B}$:

$$(S_z^{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}. \text{ On a donc que } \boxed{\text{Sp}(\hat{S}_z) = \{-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}\}}.$$

Il reste à déterminer les valeurs propres de $\hat{S}_y$. Calculons le polynôme caractéristique de $(S_y^{\mathcal{B}})$:

$$\chi_{S_y} = \det(XI_2 - (S_y^{\mathcal{B}})) = \begin{vmatrix} X - \frac{\hbar}{2i} & \frac{\hbar}{2i} \\ \frac{\hbar}{2i} & X \end{vmatrix} = X^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 = (X - \frac{\hbar}{2})(X + \frac{\hbar}{2})$$

On en déduit ainsi que $\boxed{\text{Sp}(\hat{S}_y) = \{-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}\}}.$

Question 14: Quelles sont les vecteurs propres de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$?

Les matrices $(S_x^{\mathcal{B}'})$ et $(S_z^{\mathcal{B}})$ étant diagonales respectivement dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, on lit directement les vecteurs propres sur ces bases.

- Pour $\hat{S}_z$, les vecteurs propres sont $|\uparrow\rangle$ (pour la valeur propre $\frac{\hbar}{2}$) et $|\downarrow\rangle$ (pour $-\frac{\hbar}{2}$).
- Pour $\hat{S}_x$, les vecteurs propres sont $|+\rangle$ (pour la valeur propre $\frac{\hbar}{2}$) et $|-\rangle$ (pour $-\frac{\hbar}{2}$).

Il reste à déterminer les vecteurs propres de $\hat{S}_y$ à partir de sa matrice $(S_y^{\mathcal{B}})$. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Pour la valeur propre $\frac{\hbar}{2}$:

$$v \in \ker\left((S_y^{\mathcal{B}}) - \frac{\hbar}{2}I_2\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2i} \\ \frac{\hbar}{2i} & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\frac{\hbar}{2}x + \frac{\hbar}{2i}y = 0 \Leftrightarrow y = ix$$

Le vecteur normalisé $|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ convient.

De même, pour la valeur propre $-\frac{\hbar}{2}$, soit $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, alors :

$$v' \in \ker\left((S_y^{\mathcal{B}}) + \frac{\hbar}{2}I_2\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2i} \\ \frac{\hbar}{2i} & \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\hbar}{2}x' + \frac{\hbar}{2i}y' = 0 \Leftrightarrow y' = -ix'$$

Le vecteur normalisé $|-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ convient.

LICENCE

En soumettant cet article aux *Strasbourg Students Physical Letters*, l'auteur accepte qu'il soit distribué sous la licence CC BY-SA 4.0 (Distribution libre - Attribution - Partage sous les mêmes conditions) sur le site des 2SPL (www.2spl.fr).