Spineurs, géométrie et espace-temps

Loris Delafosse

Geometry for Quantum Science Group
Quantum Science and Nanomaterials Interdisciplinary Thematic Institute
University of Strasbourg

4 juin 2024

Sommaire

Sommaire

Que sait-on faire ?

Domaine mathématique le mieux maitrisé : *l'algèbre linéaire*

Conséquence naturelle : espace physique $\sim \mathbb{R}^3$, espace vectoriel (euclidien) de dimension 3

Les lois de la physique sont linéaires (on espère) $\Rightarrow$ une bonne quantité physique doit être *tensorielle*

Groupe d'invariance de la mécanique newtonienne : groupe de Galilée

Sommaire

Comment représentez-vous une rotation ?

Différents formalismes

$$
\begin{aligned}
&\text{Matrices} && \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\text{Nombres complexes} && \mathrm{e}^{i\theta} \\
&\text{Quaternions} && \mathrm{e}^{i\theta_1 + j\theta_2 + k\theta_3}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Pas terrible, tout ça. . .

L'algèbre géométrique

Programme d'unification des formalismes de la physique entamé par David Hestenes dans les années 80. Recette :

1. Choisissez un espace vectoriel réel V (au hasard $V = \mathbb{R}^3$)
2. Construisez une *algèbre extérieure* (alias algèbre de Grassmann) sur V, notée ΛV
3. Ajoutez un produit scalaire sur V et étendez-le à ΛV (on l'appelle alors *produit intérieur*)
4. Mélangez tout, vous obtenez le produit géométrique

L'espace qui résulte de tout cela est appelée *algèbre géométrique* sur V (algèbre de Clifford réelle sur V), notée $\mathbb{G}(V)$

Quand $V = \mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{G}(V) = \mathbb{G}^n$.

L'algèbre géométrique

L'algèbre géométrique contient toutes les sommes de scalaires, vecteurs, bivecteurs,. . ., k-vecteurs. . .

- k-vecteur : objet de grade k de l'algèbre géométrique, généré par les produits extérieurs de k vecteurs
- Multivecteur : élément quelconque de l'algèbre géométrique

La dimension de l'espace des k-vecteurs est $\binom{\dim V}{k}$, donc la dimension de l'algèbre géométrique est :

$$\sum_{k=0}^{\dim V} \binom{\dim V}{k} = 2^{\dim V} \tag{2}$$

Identité fondamentale de l'algèbre géométrique

Soit $\mathbf{a}$ un vecteur, B un multivecteur, alors :

$$\mathbf{a}B = \mathbf{a} \cdot B + \mathbf{a} \wedge B \tag{3}$$

Interprétation géométrique des bivecteurs

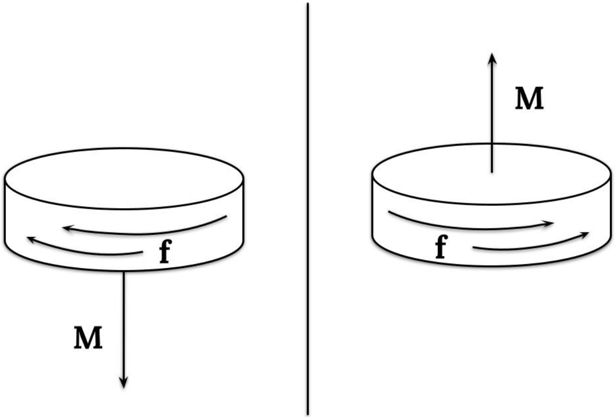


Figure – Le bivecteur est le bon objet géométrique pour représenter des moments de force, et autres pseudovecteurs (objets antisymétriques par réflexion)

Rotations en algèbre géométrique

Considérons deux vecteurs a, b unitaires. Notons $R = ab$.

$$Rb = ab^2 = a \tag{4}$$

Ainsi, R effectue une rotation de b à a.

$$R = a \cdot b + a \wedge b = \cos\theta + i\sin\theta \tag{5}$$

où i est un bivecteur unitaire. Il existe une BON (e_1, e_2) du plan i telle que $i = e_1e_2$

$$i^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1^2e_2^2 = -1 \tag{6}$$

Spineurs : éléments de la sous-algèbre paire (scalaires $\oplus$ bivecteurs)

Une rotation d'angle θ d'un vecteur a dans le plan i est représentée par le spineur $R = \mathrm{e}^{i\theta/2}$:

$$a' = R^{-1} a R \tag{7}$$

Complexes : n'importe quelle sous-algèbre de spineurs avec un bivecteur directeur i commun (ou plus simplement les spineurs de $\mathbb{G}^2$)

Quaternions : exactement les spineurs de $\mathbb{G}^3$

$\mathrm{e}^{i\theta/2}$ et $\mathrm{e}^{i(\theta+2\pi)/2} = -\mathrm{e}^{i\theta/2}$ sont deux spineurs différents mais associés à la même rotation !

Sommaire

Comment utiliser des outils linéaires pour modéliser des transformations affines ?

On ne travaille pas dans l'espace linéaire $\mathbb{R}^3$, mais dans l'espace affine associé $\mathbb{E}^3$

- Imposer un système de coordonnées
- Ajouter une (ou deux) dimensions supplémentaires à l'espace
- Ajouter une unité imaginaire (oui, encore une)

Ajoutons une unité imaginaire (juste pour le lore)

On introduit ϵ tel que $\epsilon^2 = 0$

Quaternions duaux : objets de la forme $\hat{q} = q + \epsilon q_0$, avec q, q_0 des quaternions

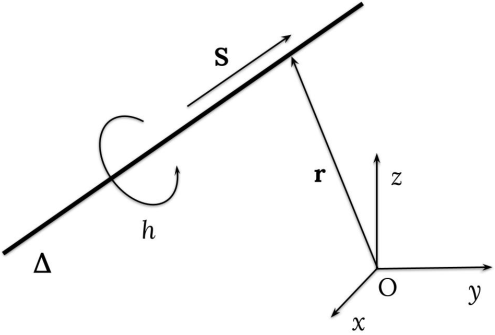
$$\widehat{q} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\widehat{S}$$
$$\text{with } \widehat{S} = 2\tan\frac{\theta}{2}\mathbf{s} + \varepsilon\left(2\tan\frac{\theta}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{s} + t\mathbf{s}\right)$$

Impossible d'utiliser l'algèbre géométrique pour se débarrasser de ces unités imaginaires-ci : l'algèbre géométrique aussi est un espace *linéaire*

Il nous faut des *tenseurs affines*

Sous vos yeux ébahis... les torseurs !

Torseur : droite orientée, munie d'une “intensité” et d'un “pas de vis”



$$\$ = (\mathbf{S}, \mathbf{r} \times \mathbf{S} + h\mathbf{S}) \tag{8}$$

Le formalisme français

L'expression $\$ = (\mathbf{S}, \mathbf{r} \times \mathbf{S} + h\mathbf{S})$ dépend du point d'origine choisi

Meilleure définition

Un torseur est un champ de vecteurs $\mathbf{M}$ sur l'espace affine $\mathbb{E}^3$, vérifiant la relation de Varignon :

$$\mathbf{M}(O) = \mathbf{M}(I) + \overrightarrow{OI} \times \mathbf{S} \tag{9}$$

pour un certain vecteur $\mathbf{S}$ appelé *résultante* du torseur.

Un torseur est entièrement caractérisé par la donnée du moment en un point et de la résultante :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{M}(O) \end{Bmatrix}_O \tag{10}$$

Quelques problèmes/remarques

- Produit vectoriel dans la relation de Varignon : définition limitée à la dimension 3
- Les éléments de réduction de tout torseur sont un vecteur et un pseudovecteur
- Il devient possible de représenter des mouvements finis, mais…

$$\$_f = \begin{bmatrix} 2\tan\frac{\theta}{2}\mathbf{s} \\ t\mathbf{s} + 2\mathbf{r} \times \tan\frac{\theta}{2}\mathbf{s} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{1}{1 - A\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}\left(\$_f^1 + \$_f^2 - \frac{1}{2}\$_f^1 \times \$_f^2 - A \times \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ t_2\mathbf{s}_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ t_1\mathbf{s}_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}\right)\right)$$

(Oui, c'est moche !)

Les torseurs généralisés

Idée : remplacer le produit vectoriel par un produit extérieur

Relation de Varignon généralisée

Un torseur est un champ de multivecteurs M sur l'espace affine $\mathbb{E}^n$, vérifiant la relation de Varignon :

$$M(O) = M(I) + \overrightarrow{OI} \wedge S \tag{11}$$

pour un certain multivecteur S appelé *résultante* du torseur.

Un torseur est entièrement caractérisé par la donnée du moment en un point et de la résultante :

$$\left|\mathscr{S}\right\} = \left|\begin{matrix} S \\ M(O) \end{matrix}\right\}_O \tag{12}$$

Torseurs et cotorseurs

La relation de Varignon augmente le grade pour passer de la résultante au moment

Torseur cinématique : la résultante est une vitesse angulaire (bivecteur), le moment est une vitesse linéaire (vecteur). Comment faire ?

Relation de Varignon duale

Un cotorseur est un champ de multivecteurs M sur l'espace affine $\mathbb{E}^n$, vérifiant la relation de Varignon :

$$M(O) = M(I) - \overrightarrow{OI} \cdot S \tag{13}$$

On note :

$$\{\mathscr{S}| = {}_O\left\{\begin{matrix} S \\ M(O) \end{matrix}\right| \tag{14}$$

Mouvements finis et torseurs généralisés

Un mouvement fini constitué d'une rotation d'angle θ dans le plan i autour du point I, et d'une translation pure $\mathbf{t}$ orthogonale à I, s'écrit :

$$
{}_I\left\{\begin{matrix} R \\ T \end{matrix}\right| = {}_I\left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{i\theta/2} \\ \frac{\mathbf{t}}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2} \end{matrix}\right| \tag{15}
$$

Composition des mouvements

Soient deux mouvements successifs (1) et (2). Le mouvement total équivalent est :

$$
{}_A\left\{\begin{matrix} R_1 \\ T_1 \end{matrix}\right| \circ {}_A\left\{\begin{matrix} R_2 \\ T_2 \end{matrix}\right| = {}_A\left\{\begin{matrix} R_1 R_2 \\ R_1 T_2 + T_1 R_2 \end{matrix}\right| \tag{16}
$$

Considérablement plus simple que les matrices, les quaternions duaux ou les "torseurs finis" usuels !

{GeQS|

Loris Delafosse. Formalizing Screw Theory with 3D Geometric Algebra. *Phys. Scr.* **99** 5 (2024). doi :10.1088/1402-4896/ad3787

Bref ! Spineurs, géométrie, ok

Et l'espace-temps, dans tout ça ?

Sommaire

Quelques éléments de relativité générale

L'espace-temps est décrit par une variété différentielle de dimension 4

La métrique $g_{\mu\nu}$ est un champ de tenseurs défini en tout point de l'espace-temps, et qui vérifie *l'équation d'Einstein* :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{17}$$

avec $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein (qui décrit la courbure de l'espace-temps) et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion

Sommaire

Spineurs et géométrie dans l'espace de Minkowski

On considère un rayon lumineux dans l'espace de Minkowski, dirigé par un vecteur de genre lumière $s^a \quad (a = 0, 1, 2, 3)$

On calcule le moment du rayon : $m^{ab} = r^a s^b - s^a r^b$
Un tenseur d'ordre 2 (16 composantes) pour un bivecteur (6 composantes)...

On peut traduire les vecteurs en matrices :

$$s^a \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s^0 + s^3 & s^1 - is^2 \\ s^1 + is^2 & s^0 - s^3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

On réécrit alors s^a avec deux indices $\varsigma^{\alpha\dot{\alpha}} \quad (\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2)$

En particulier, puisque s^a est de genre lumière :

$$\varsigma^{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{19}$$

Les twisteurs

On a alors les traductions suivantes :

$$s^a \longleftrightarrow \lambda^\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{20}$$

$$m^{ab} \longleftrightarrow \epsilon^{\alpha\beta}\mu^{(\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\beta})} - \mu^{(\alpha}\lambda^{\beta)}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{21}$$

$$\mu_{\dot{\alpha}} = \lambda^\alpha r_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{22}$$

Un *twisteur* $Z^A \quad (A = 1, 2, 3, 4)$ est défini par :

$$Z^A = (\lambda^{\dot{\alpha}}, \mu_\alpha) \tag{23}$$

On a alors une représentation efficace du rayon lumineux, munie d'une "intensité" donnée par l'amplitude de λ

Cela ressemble fort à un torseur généralisé, où résultante et moment seraient isomorphes à des spineurs. De fait :

$$|Z\} = \left|\begin{matrix}\lambda^* \\ \mu\end{matrix}\right\}_O \tag{24}$$

est un twisteur, où λ et μ sont des spineurs au sens de l'algèbre géométrique. L'étoile est la dualité de l'algèbre géométrique, qui transforme le spineur en pseudospineur (relation de Varignon oblige)

But wait

C'est un torseur défini sur $\mathbb{E}^3$...

Sommaire

Un bilan rapide de la théorie des twisteurs

- Une théorie élégante (rayons lumineux plutôt qu'évènements)
- Lien avec les spineurs : espoir pour un formalisme unificateur
- Apparemment utile pour effectuer des calculs de diffusion en théorie des cordes

Mais...

- Toujours pas de formulation complète de la relativité générale en termes de twisteurs
- Problème des particules massives

La théorie des twisteurs est un programme à l'abandon...

Cependant !

Et si les twisteurs nous ouvraient un nouveau paradigme ?

- Les théories quantiques des champs s'essoufflent
- Et si on revoyait complètement notre conception de l'espace-temps ?
- Au lieu de trouver les géodésiques à partir de l'espace-temps, trouver le temps à partir de l'espace-lumière
- Symétrie par renversement du temps : antimatière, absorbeur de Wheeler et Feynman, doubles vecteurs d'état, interprétation transactionnelle
- *The End of Time* : disparation du temps comme paramètre fondamental des théories, disparition de la masse

Bibliographie

- Sutter, J. A geometric algebra primer. Unpublished work (2003). http ://www.jaapsuter.com/geometric-algebra.pdf
- Hestenes, D. *New Foundations for Classical Mechanics* (2003) Kluwer Academic Publishers
- Ball, R.S. *A Treatise on the Theory of Screws* (1998) Cambridge University Press
- Minguzzi, E. A geometrical introduction to screw theory. *Eur. J. Phys.* **34** p. 613 (2012). doi :10.1088/0143-0807/34/3/613
- Delafosse, L. Formalizing Screw Theory with 3D Geometric Algebra. *Phys. Scr.* **99** 5 (2024). doi :10.1088/1402-4896/ad3787
- Rogalyov, R.N. Screw Theory : From Mechanical Engineering to Twistors. *Phys. Part. Nuclei* **54** pp. 957–960 (2023). doi :10.1134/S1063779623050209
- Penrose, R. Twistor Algebra. *J. Math. Phys.* **8** 2 p. 345 (1967). doi :10.1063/1.1705200